Correction DS n°4 Bis.

Exercice 1 :

- On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{2^{2n}}{5^{n+1}} = \dfrac{4^n}{5^n} \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{5} \times \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$

Or $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{4}{5}\right)^n$ est convergente car c'est une série géométrique avec $\frac{4}{5} < 1$.

Donc $\sum_{n \geq 0} \dfrac{2^{2n}}{5^{n+1}}$ est convergente et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{5^{n+1}} = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n$

$$= \frac{1}{5} \times \frac{1}{1 - \frac{4}{5}}$$

$$\boxed{= 1}$$

- On pose $\displaystyle S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{2^{k-1}}{k!}$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n} \frac{2^k}{k!}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} - \frac{2}{1!} - \frac{1}{0!} \right).$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} - 1 - \frac{1}{2}.$$

Or $\sum_{n \geq 0} \dfrac{2^n}{n!}$ est convergente en tant que série exponentielle

Donc (S_n) est convergente et

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{n!} = \frac{1}{2} e^2 - \frac{3}{2}}$$

- On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n^2 - n) 2^{-2n} = n(n-1)\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$

$$= \frac{1}{16} \times \left(n(n-1)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} \right).$$

Or $\sum_{n \geq 2} n(n-1)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}$ est convergente en tant que série géométrique dérivée et $\frac{1}{4} < 1$. Donc $\sum_{n \geq 0} (n^2 - n) 2^{-2n}$ est convergente et.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 - n) 2^{-2n} = \frac{1}{16} \times \frac{2}{(1 - 1/4)^3} = \frac{2 \times 4^3}{16 \times 3^3} = \boxed{\frac{8}{27}}$$

② . $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$ est une série de Rieman avec $\alpha = 3 > 1$

Donc $\boxed{\text{La série est convergente}}$

. $\forall n \geq 2$, on a $\sqrt{n} - 1 \leq \sqrt{n}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}-1} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Or $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente (série de Rieman avec $\alpha = \frac{1}{2} < 1$)

et $\forall n \geq 2$ $\frac{1}{\sqrt{n}-1} \geq 0$, $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq 0$. Donc par comparaison

$$\boxed{\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\sqrt{n}-1} \text{ est divergente}}$$

. On s'intéresse à la convergence absolue.

$$\sum_{n\geq 1} \left|\frac{(-1)^n}{n^5}\right| = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^5}$$ or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^5}$ est convergente (série de Rieman).

Donc La série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^5}$ est absolument convergente donc convergente.

Exercice 2A :

1 (a) On a $(x-1)^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 \geq 2x - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2x-1} \geq 1$$ car $2x - 1 \geq 0$ pour $x \in [1; +\infty[$.

$$\Leftrightarrow \boxed{f(x) \geq 1}$$

Comme $x \geq 1$, $\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \geq 0$ et on a donc.

$$\Leftrightarrow x^2 \leq x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 \leq \frac{(2x-1)(x+1)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2x-1} \leq \frac{x+1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{f(x) \leq \frac{x+1}{2}}$$

NB: On peut aussi étudier la fonction mais c'est plus long.

(b) $\mathcal{P}_n : \{ u_n \geqslant 1 \}$.

<u>Initialisation</u> : $u_0 \in [1 ; +\infty[$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie

<u>Hérédité</u> : On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain rang n.

Donc $u_n \geqslant 1$ Or $\forall x \geqslant 1$, $f(x) \geqslant 1$

donc $f(u_n) = u_{n+1} \geqslant 1$.

$\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie donc $(\mathcal{P}_n)$ est héréditaire.

<u>Conclusion</u> : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.

- Or $\forall x \geqslant 1$, $f(x) \leqslant \frac{x+1}{2}$.

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) \leqslant \frac{u_n + 1}{2}$

$\Leftrightarrow u_{n+1} \leqslant \frac{u_n + 1}{2}$.

(c) $\mathcal{R}_n : \{ u_n \leqslant 1 + \frac{1}{2^n}(u_0 - 1) \}$.

<u>Initialisation</u> : $1 + \frac{1}{2^0}(u_0 - 1) = u_0$ et $u_0 \leqslant u_0$.

Donc $\mathcal{R}_0$ est vraie

<u>Hérédité</u> : On suppose $\mathcal{R}_n$ vraie pour un certain rang n.

$$u_{n+1} \leqslant \frac{u_n + 1}{2}$$

$\Rightarrow u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} u_n + \frac{1}{2}$ Or $u_n \leqslant 1 + \frac{1}{2^n}(u_0 - 1)$

$$\Rightarrow u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2^n}(u_0 - 1)\right) + \frac{1}{2}$$

$$\leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}(u_0 - 1) + \frac{1}{2}.$$

$$\leqslant 1 + \frac{1}{2^{n+1}}(u_0 - 1).$$

Donc $\mathcal{R}_{n+1}$ est vraie.

$(\mathcal{R}_n)$ est héréditaire

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq u_n \leq 1 + \frac{1}{2^n}(u_0 - 1)$.

(d)

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \frac{1}{2^n}(u_0 - 1) = 1$.

D'après le théorème des gendarmes, la suite (u_n) converge et

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 1}$$

(2) (a) $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{2x} = +\infty}$

(b) $a = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{2x^2 - x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$.

$$\boxed{a = \frac{1}{2}}$$

• $f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{x^2}{2x-1} - \frac{1}{2}x$

$$= \frac{x^2}{2x-1} - \frac{1}{2}\frac{x(2x-1)}{2x-1}$$

$$= \frac{x^2 - x^2 + \frac{1}{2}x}{2x-1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2x-1}\right)$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - \frac{1}{2}x = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2}\frac{x}{2x} = \frac{1}{4}$, donc $\boxed{b = \frac{1}{4}}$

• $f(x) - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = \frac{\frac{1}{2}x}{2x-1} - \frac{1}{4} \times \frac{(2x-1)}{2x-1}$

$$= \frac{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}}{2x-1} = \frac{\frac{1}{4}}{2x-1}$$

donc $\boxed{c = \frac{1}{4}}$

(d) $\lim_{x \to +\infty} f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1/4}{2x-1} = 0$

Donc $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote d'équation $\boxed{y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}.}$

$\forall x \in [1 ; +\infty[\qquad f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) = \frac{1/4}{2x-1} > 0$

Donc la courbe est <u>au-dessus</u> de son asymptote.

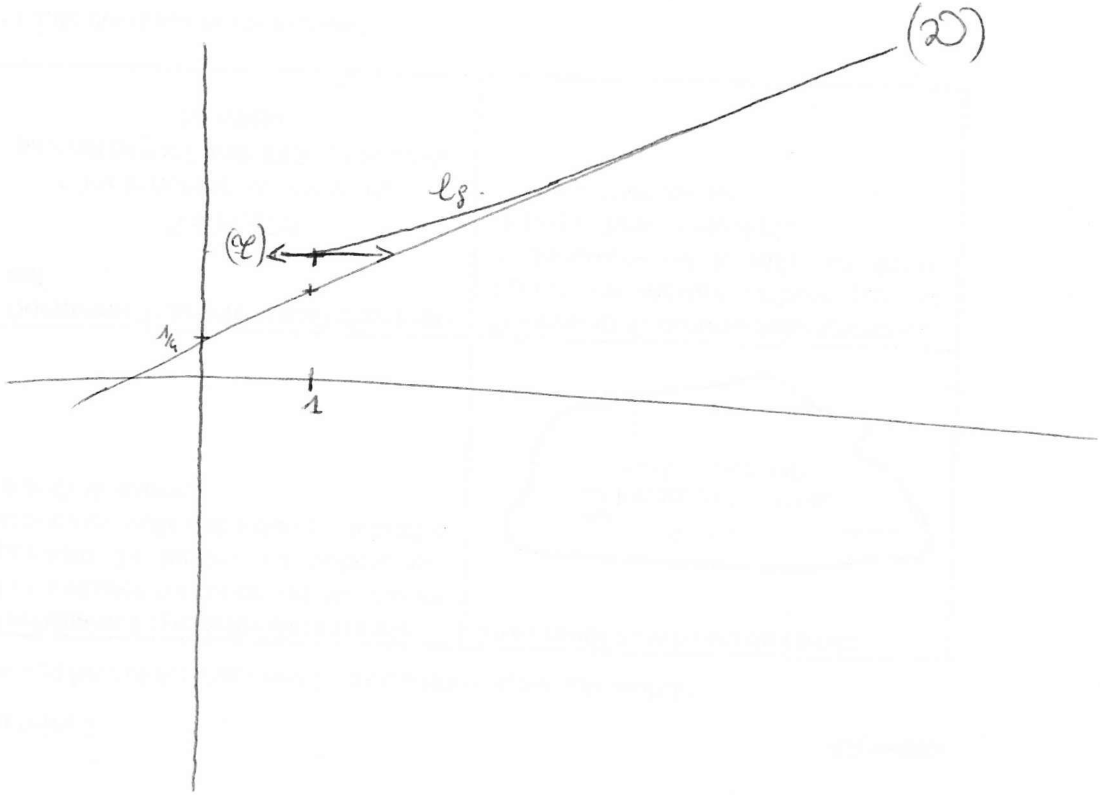
3 (a) $f'(x) = \frac{2x(2x-1) - 2x^2}{(2x-1)^2}$
$\forall x \in [1;+\infty[$

$= \frac{2x^2 - 2x}{(2x-1)^2}$

$= \frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2}$

(b) $\forall x \geq 1$, $2x(x-1) \geq 0$. donc la fonction f est strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$ (elle ne s'annule qu'une fois en $x = 1$).

(c)



(4) (a) f est strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$.

- f est continue car : $x \mapsto x^2$ est continue sur $[1 ; +\infty[$
$x \mapsto 2x-1$ est continue sur $[1 ; +\infty[$ et ne s'annule pas.
Le quotient de 2 fonctions continues est une fonction continue.

- $f(1) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (cf 2-(a))

Donc $f([1 ; +\infty[) = [1 ; +\infty[$.

D'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $[1 ; +\infty[$ sur $[1 ; +\infty[$.

(b) Soit $t \in [1 ; +\infty[$, $x^2 - 2tx + t = 0$

$$\Delta = (-2t)^2 - 4t = 4t^2 - 4t$$
$$= 4(t^2 - t) > 0$$
car $t \geq 1$.

donc il y a 2 solutions

$$x_1 = \frac{2t - 2\sqrt{t^2-t}}{2} = t - \sqrt{t^2-t}$$

$$x_2 = \frac{2t + 2\sqrt{t^2-t}}{2} = t + \sqrt{t^2-t}$$

(c) $\forall t \in [1 ; +\infty[$, $f(x) = t$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2x-1} = t$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 2tx - t$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2tx + t = 0$$

D'après la question (b), il y a deux solutions.

mais $x_1 = t - \sqrt{t^2-t} = \dfrac{(t - \sqrt{t^2-t})(t + \sqrt{t^2-t})}{t + \sqrt{t^2-t}} = \dfrac{t^2 - t^2 + t}{t + \sqrt{t^2-t}} = \dfrac{t}{t + \sqrt{t^2-t}} < 1$

Donc l'unique solution sur $[1 ; +\infty[$ est.

$$\boxed{x = t + \sqrt{t^2-t}}$$

Exercice 3A

① $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad L_2 - L_1 \to L_2$, $L_3 - 3L_1 \to L_3$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad L_3 - L_2 \to L_3.$

Un des pivots dans la méthode de Gauss est nul donc la matrice n'est pas inversible.

② (a)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & 0 & 6 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6 & 10 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 5L_1 - L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow 5L_3 + 3L_2. \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & 0 & 0 & 10 & -20 & -30 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 6 & 10 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 + L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}}_{M^{-1}} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{10} L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{10} L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3. \end{array}$$

(b) Le système est $\Pi X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X = \Pi^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

donc $X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$ $\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} \right\}}$

③ $\begin{cases} (2-\lambda) x + 2y = 0 \\ 2x + (2-\lambda) y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + (2-\lambda) y = 0 \\ (2-\lambda) x + 2y = 0 \end{cases}$ $L_1 \leftrightarrow L_2$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + (2-\lambda) y = 0 \\ \big((2-\lambda)(2-\lambda) - 4\big) y = 0 \end{cases}$ $L_2 \leftarrow (2-\lambda) L_1 - 2L_2$.

Le système est de cramer si $(2-\lambda)^2 - 4 \neq 0$

On résout $(2-\lambda)^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow (2-\lambda-2)(2-\lambda+2) = 0$

$\Leftrightarrow -\lambda(4-\lambda) = 0$

Les solutions sont $\lambda = 0$ et $\lambda = 4$.

Le système est de Cramer ssi $\lambda \neq 0, 4$.

(b) <u>Cas $\lambda = 0$</u> :

$(E_0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \{ x = -y$ $\boxed{\mathcal{S} = \{(-y, y),\ y \in \mathbb{R}\}}$

<u>Cas $\lambda = 4$</u>

$(E_4) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \{ x = y$ $\boxed{\mathcal{S} = \{(y, y),\ y \in \mathbb{R}\}}$

Exercice 4A

(a) $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $F_i(\Omega) = [\![0;N]\!]$.

On considère l'épreuve de Bernoulli, où tirer le jeton i est un succès (probabilité $\frac{1}{p}$) et on répète cette épreuve N fois de manière indépendante et on compte le nombre de succès donc

$$F_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(N; \frac{1}{p}\right).$$

$\forall i \in [\![1,p]\!]$, $E(F_i) = \frac{N}{p}$ $\quad V(F_i) = N \times \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$

$= N \times \frac{p-1}{p^2}$

(b) $\boxed{F(\Omega) = \{N\}.}$ → C'est une loi certaine.

$E(F) = N$ et $V(F) = 0$

(c) Soient $i \in [\![1,p]\!]$, $j \in [\![1,p]\!]$ et $i \neq j$

$(F_i = N) \cap (F_j = N)$ est un évènement impossible

donc $P((F_i = N) \cap (F_j = N)) = 0$

Or $P(F_i = N) \times P(F_j = N) = \left(\frac{1}{p}\right)^N \times \left(\frac{1}{p}\right)^N \neq 0$

Donc F_i, F_j ne sont pas indépendantes

(2) $X_i(\Omega) = \{0; 1\}$.

$P(X_i = 0) = p(F_i = 0) = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^N$

et donc $P(X_i = 1) = 1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^N$.

Par conséquent $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^N\right)$.

$\boxed{E(X_i) = 1 - \left(\frac{p-1}{p}\right)^N}$ et $\boxed{V(X_i) = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^N \left(1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^N\right)}$

(b) Sachant que $X_j = 0$, cela signifie que l'on sait que le jeton j n'a jamais été tiré

Ainsi $P_{X_j=0}(X_i=0) = \left(1 - \frac{1}{p-1}\right)^N$

Les variables aléatoires X_j et X_i ne sont pas indépendantes car sinon $P_{(X_j=0)}(X_i=0) = P(X_i=0)$ ce qui n'est pas le cas.

(c) $E(X) = \sum_{i=1}^{p} E(X_i) = \sum_{i=1}^{p}\left(1 - \left(\frac{p-1}{p}\right)^N\right)$.

$= p - p\left(\frac{p-1}{p}\right)^N$.

3 (a) Les boules représentent les différents sites.

Les tirages représentent les appels.

F_i : le nombre de fois où le $i^{ème}$ site est appelé.

X_i : indique si le $i^{ème}$ site a été appelé ou non.

X : représente le nombre de site qui ont été appelés

(b) Infaisable sans calculatrice.

$E(F_i) = \frac{50}{15} \simeq 3,3$

$P(X_i = 0) = \left(\frac{14}{15}\right)^5 \simeq 0,03$

$E(X_i) \simeq 0,97$

et donc $E(X) \simeq 14,5$

Donc, même si chaque site ne reçoit en moyenne que 3 appels, les 15 sites (14,5) sont en moyenne appelé chaque jour. Ainsi il est utile d'avoir un SAV sur chaque site.